Capitolo 7
Teoria della relatività generale

50. CENNI STORICI FINO AL LAVORO DI EINSTEIN DEL 1916 [1]

La legge gravitazionale newtoniana, che presuppone l'esistenza di una forza agente *istantaneamente* a distanza, è incompatibile con la teoria della relatività ristretta. Questa richiede che la legge della gravitazione sia covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz e che la propagazione delle sue azioni non avvenga con velocità superiore a quella della luce [2]. Già Poincaré [3] affronta il problema della modificazione della legge di Newton in modo da soddisfare a questi requisiti. Il problema può venire risolto in piú modi. A tutti è comune l'ipotesi che la forza mutua agente tra due masse puntiformi non dipenda dalle loro posizioni *simultanee*, ma da quelle occupate in istanti che differiscono di $t = r/c$ e dalle loro velocità (eventualmente anche dalle loro accelerazioni). Le deviazioni dalla legge di Newton sono sempre del secondo ordine in v/c, sono quindi molto piccole e non risultano con-

[1] Sui precedenti tentativi di modificare la legge gravitazionale di Newton cfr. J. ZENNECK, « Enc. math. Wiss. » vol. 5, art. 2, e S. OPPENHEIM, ibid., vol. 6, art. 22, in particolare il cap. 5. Noi diamo lo sviluppo storico nelle grandi linee; per questioni particolari vedi anche l'articolo di F. KOTTLER, ibid., vol. 6, art. 22.

[2] Supponendo che la velocità di propagazione delle azioni gravitazionali sia indipendente dallo stato di moto dei corpi che le esercitano, segue subito che essa deve essere *esattamente* uguale alla velocità della luce nel vuoto.

[3] H. POINCARÉ, Rend. Pal. 21, 129 (1906).

traddette da nessuna esperienza[1]. Minkowski e Sommerfeld[2] hanno trascritto la teoria di Poincaré in forma tetradimensionale; una legge particolare è stata discussa da Lorentz[3].

A tutte queste trattazioni va obiettato che il loro punto di partenza è la legge elementare della forza, invece dell'equazione differenziale di Poisson. Una volta riconosciuto che la velocità di propagazione di un'azione è finita, ci si può attendere di pervenire a leggi *semplici* e di validità generale solo quando quell'azione venga descritta mediante grandezze di stato variabili con continuità nello spazio e nel tempo (un *campo*) e si ricerchino le *equazioni differenziali* di questo campo. Il pro-

2. *Sulla gravitazione dell'energia*

La teoria della relatività ci ha insegnato che la massa inerziale di un corpo cresce con il suo contenuto energetico; se $E/2$ è l'incremento di energia, l'incremento della massa inerziale è E/c, dove c indica la velocità della luce. Ma a questo incremento della massa inerziale corrisponde anche un incremento della massa gravitazionale? Se non fosse così, un corpo cadrebbe nello stesso campo gravitazionale con accelerazione diversa a seconda del suo contenuto di energia. E quel risultato, così soddisfacente, della teoria della relatività, e cioè il confluire del principio di conservazione della massa nel principio di conservazione dell'energia, non potrebbe essere più considerato valido: si dovrebbe infatti rinunciare al principio di conservazione della massa nella sua vecchia formulazione per la massa *inerziale*, ma lo si dovrebbe, viceversa, conservare per la massa gravitazionale.

Ciò dev'essere considerato assai improbabile. D'altra parte, la corrente teoria della relatività non ci offre alcun argomento dal quale si possa inferire una dipendenza del peso di un corpo dal suo contenuto di energia. Mostreremo tuttavia che la nostra ipotesi dell'equivalenza dei sistemi K e K' ha come conseguenza necessaria la gravitazione dell'energia.

[3] In una memoria successiva si mostrerà che il campo gravitazionale considerato è omogeneo solo in prima approssimazione.

A. Einstein, *Autobiografia scientifica* in *Opere Scelte*, pp. 92-93

L'uguaglianza della massa inerziale e di quella gravitazionale porta […], in modo del tutto naturale, ad ammettere che l'esigenza fondamentale della teoria della relatività ristretta (l'invarianza delle leggi rispetto alle trasformazioni di Lorentz) sia troppo limitata, cioè che occorra postulare un'invarianza delle leggi anche rispetto a trasformazioni *non lineari* delle coordinate, nel continuo quadridimensionale.

Ciò accadde nel 1908. Perché furono necessari altri sette anni per la costruzione della relatività generale? La ragione principale è data dal fatto che non è facile liberarsi dall'idea che le coordinate debbano avere un significato metrico immediato. Le cose avvennero pressappoco nel modo seguente.

Partiamo da uno spazio vuoto, privo di campo, come si fa – rispetto a un sistema inerziale – nella teoria della relatività ristretta, poiché questa è la più semplice di tutte le situazioni fisiche immaginabili; e supponiamo d'introdurvi un sistema non inerziale, che rispetto a quello inerziale sia (in una sorta di descrizione tridimensionale) uniformemente accelerato in una direzione (opportunamente definita); esisterà allora rispetto a questo nuovo sistema un campo di gravitazione statico parallelo. Il sistema scelto può essere rigido, di tipo euclideo, con relazioni metriche tridimensionali; ma il tempo, in cui il campo appare statico, *non* è misurato da orologi in quiete e *di identica costruzione*. Da questo esempio particolare è già possibile rendersi conto che il significato metrico immediato delle coordinate si perde, se solo si ammettono trasformazioni non lineari delle coordinate. La qual cosa è però *obbligatoria*, se si vuole tener conto dell'uguaglianza della massa gravitazionale e di quella inerziale nelle basi stesse della teoria, e se si vuole altresì superare il paradosso di Mach concernente i sistemi inerziali.

Dal manoscritto di Einstein conservato alla Pierpont Morgan Library di New York

Citato ii Pais, *Sottile è il signore*…p. 194

Fu allora che ebbi il pensiero più felice della mia vita, nella forma seguente. Il campo gravitazionale ha[1] solo un'esistenza relativa, in modo analogo al campo elettrico generato dall'induzione magnetoelettrica. ***Infatti, per un osservatore che cada liberamente dal tetto di una casa, non esiste*** – almeno nelle immediate vicinanze – ***alcun campo gravitazionale*** [corsivo di Einstein]. In effetti, se l'osservatore lascia cadere dei corpi, questi permangono in uno stato di quiete o di moto uniforme rispetto a lui, indipendentemente dalla loro particolare natura chimica o fisica (in questo genere di considerazioni, ovviamente si trascura la resistenza dell'aria). L'osservatore di conseguenza ha il diritto di interpretare il proprio stato come uno "stato di quiete".

Grazie a questa idea, quella singolarissima legge sperimentale secondo cui, in un campo gravitazionale, tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione, veniva improvvisamente ad acquistare un significato fisico profondo. Precisamente, se vi fosse anche un solo oggetto che cadesse nel campo gravitazionale in modo diverso da tutti gli altri, allora, grazie ad esso, un osservatore potrebbe accorgersi di trovarsi in un campo gravitazionale e di stare cadendo in esso. Se però un oggetto del genere non esiste, come si è mostrato sperimentalmente con grande precisione, allora l'osservatore non dispone di elementi oggettivi che gli consentano di stabilire che si trova in caduta libera in un campo gravitazionale. Piuttosto ha il diritto di considerare il proprio stato come uno stato di quiete e il proprio spazio ambiente come libero da campi, almeno per quanto riguarda la gravitazione.

L'indipendenza dell'accelerazione di caduta dalla natura dei corpi, ben nota sperimentalmente, è pertanto un solido argomento in favore dell'estensione del postulato di relatività a sistemi di coordinate in moto non uniforme l'uno relativamente all'altro.

Lucrezio, *De rerum natura*
Libro II 230-239 (trad. di Olimpio Cescatti)

nam per aquas qaecumque cadunt atque aera rarum],
haec pro ponderibus casus celerare necessest
propterea quia corpus aquae naturaque tenvis
aeris haud possunt aeque rem quamque morari,
sed citius cedunt gravioribus exsuperata.
at contra nulli de nulla parte neque ullo
tempore inane potest vacuum subsistere rei,
quin, sua quod natura petit, concedere pergat;
omnia quapropter debent per inane quietum
aeque ponderibus non aequis concita ferri.

Senza dubbio tutti i corpi che cadono attraverso l’acqua o il raro fluido dell’aria, devono accelerare la caduta in proporzione alla loro pesantezza; gli elementi dell’acqua e la natura dell’aria sottile non possono ritardare ugualmente tutti i corpi, e cedono prima alla vittoriosa pressione dei più pesanti. Ma il vuoto, in nessun luogo, in nessun tempo, lo si potrebbe trovare sotto alcun corpo, senza continuare a cedergli, come esige la sua natura. Tutti gli atomi, portati attraverso il vuoto inerte, devono muoversi con uguale velocità, nonostante la diversità del loro peso.

Dalla lettera di Einstein a Sommerfeld del 29 ottobre 1912

Al momento mi sto occupando esclusivamente del problema della gravitazione e ora credo che riuscirò a superare tutte le difficoltà grazie all'aiuto di un amico matematico[1] di qui. Ma una cosa è certa, in tutta la mia vita non ho mai lavorato tanto duramente, e l'animo mi si è riempito di un grande rispetto per la matematica, la parte più sottile della quale avevo finora considerato, nella mia dabbenaggine, un puro lusso. In confronto a questo problema, l'originaria teoria della relatività è un gioco da bambini.

---

[1] L'amico è Marcel Grossmann (1878-1936)

Nel discorso di Kyoto (dicembre 1922), Einstein disse

> Se tutti i sistemi [accelerati] sono equivalenti, allora la geometria euclidea non può valere in ciascuno di essi. Abbandonare la geometria e conservare le leggi [fisiche] è come descrivere i pensieri senza le parole. Bisogna cercare le parole prima di poter esprimere dei pensieri. Che cosa si doveva cercare a questo punto? Tale problema rimase insolubile per me fino al 1912, quando all'improvviso mi resi conto che la teoria di Gauss delle superfici forniva la chiave per svelare questo mistero. Compresi che le coordinate di una superficie di Gauss avevano un profondo significato. Non sapevo però a quell'epoca che Riemann aveva studiato i fondamenti della geometria in maniera ancora più profonda. Mi ricordai all'improvviso che la teoria di Gauss era compresa nel corso di geometria tenuto da Geiser quando ero studente (...) Mi resi conto che i fondamenti della geometria avevano un significato fisico. Quando da Praga tornai a Zurigo, vi trovai il matematico Grossmann, mio caro amico: da lui appresi le prime notizie sul lavoro di Ricci e in seguito su quello di Riemann. Così *gli domandai se il mio problema potesse essere risolto con la teoria di Riemann* [corsivo mio], e cioè se gli invarianti dell'elemento di linea potessero determinare completamente le quantità che ero andato cercando. [I1]

La seconda dichiarazione di Einstein sul periodo luglio-agosto risale al 1923: "Tuttavia ebbi l'idea decisiva dell'analogia tra il problema matematico della teoria [della relatività generale] e la teoria gaussiana delle superfici solo nel 1912, dopo il mio ritorno a Zurigo, senza che a quell'epoca fossi al corrente dei lavori di Riemann, Ricci e Levi-Civita. Questi [lavori] vennero portati alla mia attenzione per la prima volta dal mio amico Grossmann, *allorché gli posi il problema della ricerca di tensori generalmente covarianti le cui componenti dipendano solo dalle derivate dei coefficienti* [$g_{\mu\nu}$] *dell'invariante quadratico fondamentale* [$g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$]" (corsivo mio) [E20].

Da queste due affermazioni si evince che, fin dalle sue ultime settimane a Praga, Einstein già sapeva che ciò che gli occorreva era la teoria degli invarianti e dei covarianti associati con l'elemento differenziale di linea

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{12.1}$$

in cui le dieci quantità $g_{\mu\nu}$ sono da considerare come *campi dinamici* che in qualche modo descrivono la gravitazione. Subito dopo essere arrivato

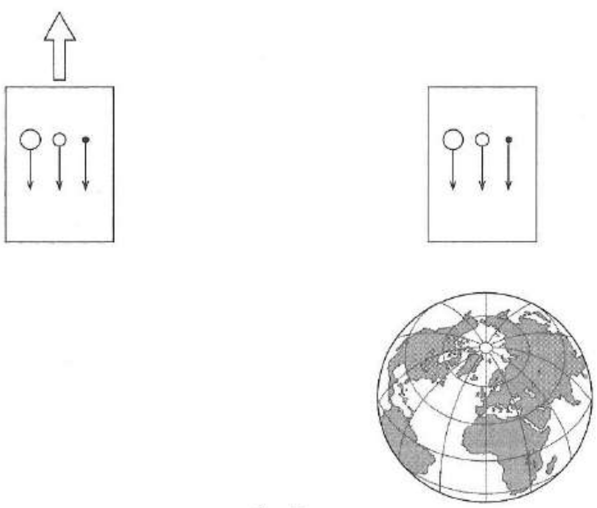


fig. 18

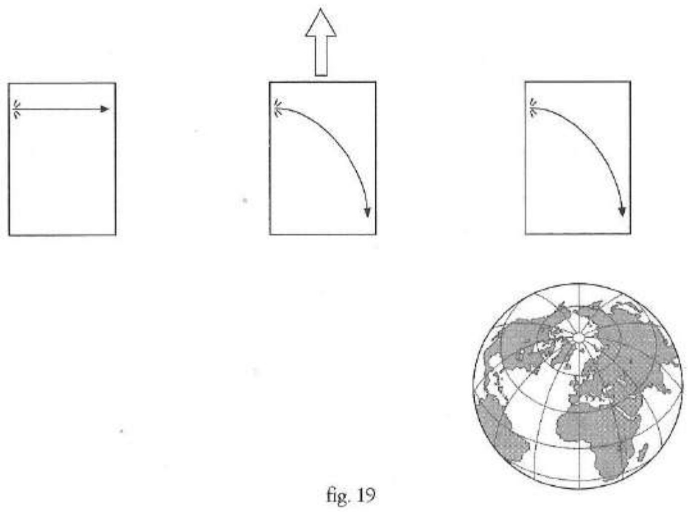


fig. 19

Bisogna però sottolineare che l'equivalenza fra il campo inerziale e il campo gravitazionale è quantitativa, ovvero numerica, e locale. Affermare che i due campi sono equivalenti non significa affatto sostenere che sono la stessa cosa. La principale differenza sta nel fatto che la sorgente del campo inerziale è data dal passaggio da un sistema di riferimento inerziale a uno non inerziale, mentre la sorgente del campo gravitazionale è data da una distribuzione di massa, o da una distribuzione di energia giacché, come abbiamo visto in relatività speciale, massa ed energia sono due facce della stessa medaglia. Inoltre, e questa è la seconda profonda diffe-

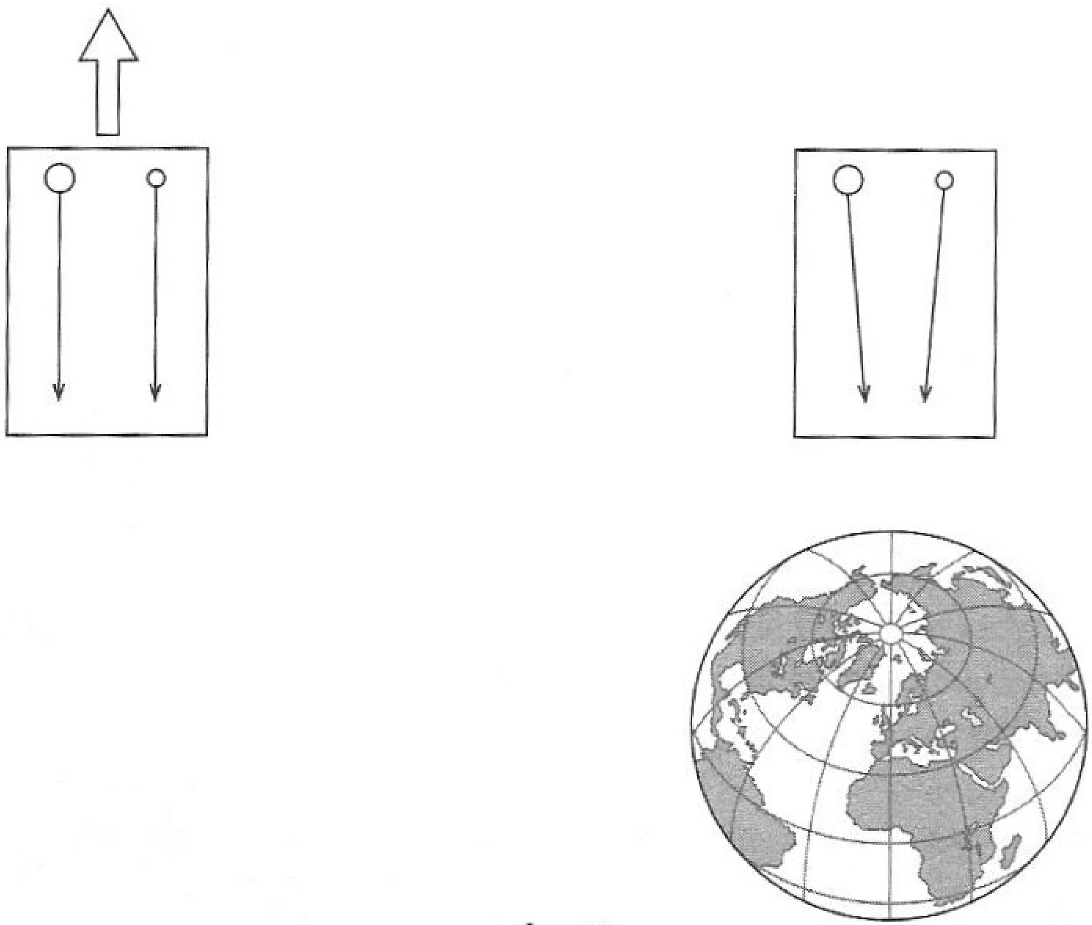


fig. 20

renza, mentre il campo inerziale è globalmente uniforme, il campo gravitazionale non lo è, come si può facilmente intuire pensando che le sue linee di forza convergono verso la sorgente. Questo significa che se localmente i due campi sono indistinguibili, non lo sono più globalmente. Basta infatti osservare se le traiettorie degli oggetti in caduta dentro la cabina continuano a essere parallele o se convergono. Nel primo caso siamo in presenza di un campo inerziale fittizio, nel secondo di un campo gravitazionale reale (cfr. fig. 20).

Ritorniamo adesso a Einstein. Visto che per la relatività speciale le leggi della fisica sono covarianti per trasformazioni di Lorentz, l'esigenza è quella di rendere covariante pure la legge della gravitazione. Solo che, considerata l'equivalenza fra campi inerziali e campi gravitazionali, la relatività fra sistemi inerziali non è più sufficiente. Bisogna estenderla anche a sistemi non inerziali. Ma come fare? Questo è un problema estremamente importante per chi, come Einstein, intendeva costruire una fisica dove non ci fossero sistemi di riferimento privilegiati. Nella relatività speciale, i sistemi inerziali godono ancora di uno statuto particolare rispetto a quelli non inerziali. Quindi, da un lato vi è il problema di unificare la gravitazione con la relatività speciale, dall'altro vi è il problema di estendere la covarianza a sistemi non inerziali.

La via d'uscita che porta alla relatività generale, ossia alla teoria che risolve i due problemi detti, sta proprio nel principio d'equivalenza. Infatti, se i campi inerziali o fittizi sono originati da un passaggio da un sistema inerziale a uno non inerziale, è sempre possibile trovare una trasformazione fra sistemi di riferimento che permette di passare da un sistema non inerziale a uno inerziale. Poiché il campo gravitazionale, che è reale, *localmente* può essere pensato come un campo inerziale, allora è possibile trovare delle trasformazioni che permettono di passare a un sistema inerziale dove esso, *sempre localmente*, può essere trascurato. E, ovviamente, in questo sistema vale la relatività speciale. La nuova teoria che serve è allora una teoria che localmente – nel senso di *intorno infinitesimo* dell'evento 4-dimensionale considerato – si deve ridurre alla relatività speciale.

11

I fondamenti della teoria della relatività generale (1916)

La teoria della quale tratto nella presente memoria rappresenta la massima generalizzazione immaginabile della teoria che oggi prende ordinariamente il nome di «teoria della relatività»; nel seguito chiamo quest'ultima, per distinguerla da quella che ora espongo, «teoria della relatività ristretta», e suppongo che sia conosciuta. La generalizzazione della teoria della relatività è stata molto facilitata dalla forma data alla teoria della relatività ristretta da Minkowski, il matematico che per primo ha compreso chiaramente l'equivalenza formale tra le coordinate spaziali e la coordinata temporale, rendendola applicabile alla teoria. I mezzi matematici necessari per la teoria della relatività generale erano già pronti nel «calcolo differenziale assoluto», il quale si basa sulle ricerche di Gauss, Riemann e Christoffel sulle varietà non euclidee, ed è stato eretto a sistema da Ricci e Levi-Civita e da essi applicato a problemi della fisica teorica.

Nella seconda parte della presente memoria esporrò tutti i procedimenti matematici che ci è necessario aver sotto gli occhi, e che non si può presupporre sian noti al fisico, cercando di sviluppare lo strumento matematico nella maniera il più possibile semplice e trasparente, in modo che non sia necessario uno studio della letteratura matematica per comprendere le pagine che seguono.

Da ultimo debbo esser grato all'amico Marcel Grossmann, che con la sua assistenza di matematico non solo mi ha risparmiato lo studio della letteratura matematica sull'argomento, ma mi ha altresì aiutato nella ricerca delle equazioni del campo gravitazionale.

* Postulato di relatività.
** Differenza fra meccanica classica e TRR.

TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

A. CONSIDERAZIONI FONDAMENTALI SUL POSTULATO DI RELATIVITÀ

1. *Osservazioni sulla teoria della relatività ristretta*

La teoria della relatività ristretta è fondata sul seguente postulato, al quale soddisfa anche la meccanica di Galilei e di Newton: * se un sistema di coordinate è scelto in modo tale che le leggi fisiche siano soddisfatte nella loro forma più semplice, le *stesse* leggi debbono essere soddisfatte se riferite ad ogni altro sistema di coordinate K' che si muova di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al sistema K. A questo postulato diamo il nome di «principio di relatività ristretta». La parola «ristretta» è usata per significare che il principio vale nel caso in cui il sistema K' si muova di *moto traslatorio rettilineo uniforme* rispetto al sistema K, mentre l'equivalenza tra K' e K non si estende al caso di moto *non uniforme* di K' rispetto a K.

Cosicché la teoria della relatività ristretta si differenzia dalla meccanica classica non a causa del postulato della relatività, ma a motivo del postulato secondo cui è costante la velocità della luce nel vuoto. Da quest'ultimo postulato, oltre che dal postulato di relatività ristretta, seguono, nel modo ben noto, la relatività di simultaneità, la trasformazione di Lorentz, e le leggi connesse sul comportamento dei corpi rigidi e degli orologi in movimento. **

La modificazione alla quale la teoria della relatività ristretta ha assoggettato la concezione dello spazio e del tempo è invero di vasta portata, ma un punto importante non è ancora stato sviscerato. Infatti le leggi della geometria, anche secondo la teoria della relatività ristretta, debbono venir interpretate direttamente come leggi che si riferiscono alle possibili posizioni relative ai corpi rigidi a riposo, e, più in generale, le leggi della cinematica debbono venir interpretate come leggi che descrivono le relazioni tra i campioni di lunghezza e gli orologi. A due prefissati punti materiali di un corpo rigido fisso corrisponde sempre una distanza che ha un valore ben definito, valore che non dipende dal luogo in cui si trova il corpo né dall'orientamento e che non dipende nemmeno dal tempo.

Vedremo tra poco che la teoria della relatività generale non può rimaner fedele a questa semplice interpretazione fisica dello spazio e del tempo.

2. *Ragioni che esigono un'estensione del postulato di relatività*

Nella meccanica classica vi è un innato difetto epistemologico, che fu chiaramente precisato (forse per la prima volta) da Mach, e che si ripercuote anche nella teoria della relatività ristretta. Lo illustreremo col seguente esempio. Supponiamo che due corpi fluidi, S_1 ed S_2, della stessa grandezza e della stessa natura fisica, stiano volteggiando liberamente nello spazio, a distanza così grande l'uno dall'altro e da tutte le altre masse che le sole forze gravitazionali di cui abbia significato tener conto siano quelle che sorgono dall'interazione delle differenti parti dello stesso corpo. Supponiamo che la distanza tra le due masse fluide sia invariabile, e che in nessuna delle due masse abbia luogo qualche movimento relativo di una parte rispetto a un'altra. Ma ogni massa, rispetto a un osservatore solidale con l'altra massa, ruoti con la velocità angolare costante attorno alla retta che congiunge le masse. Questo è un moto relativo controllabile dei due corpi. Ora immaginiamo che ciascuno dei due corpi sia stato misurato a mezzo di regoli campione fissi rispetto al corpo stesso, e supponiamo che la superficie di S_1 sia una sfera, e quella di S_2 un ellissoide di rivoluzione.

In seguito a ciò formuliamo il quesito: qual è la ragione di tale diversità tra i due corpi? Nessuna ragione può venir accettata come epistemologicamente soddisfacente,[1] tranne quella che asserisca che la ragione data come causa sia un fatto *sperimentale* e *osservabile*. La legge di causalità ha il significato di una affermazione aderente al mondo dell'esperienza solo quando *fatti osservabili* appaiono, alla fine, come causa ed effetto.

La meccanica newtoniana non dà una risposta soddisfacente a questa domanda. Essa afferma che le leggi della meccanica si

[1] Ovviamente una risposta può esser soddisfacente dal punto di vista epistemologico, e tuttavia falsa dal punto di vista *fisico*, se è in contraddizione con altre esperienze.

* Generalizzazione della TR.

applicano allo spazio R_1, rispetto alla quale il corpo S_1 è a riposo, ma non allo spazio R_2, rispetto al quale è a riposo il corpo S_2. Sennonché lo spazio privilegiato R_1 di Galilei, così introdotto, è una causa puramente *fittizia*, e non un fatto osservabile. È quindi chiaro che la meccanica di Newton non soddisfa realmente l'esigenza della causalità nel caso in esame, ma solo apparentemente, in quanto rende la causa fittizia R_1 responsabile del diverso comportamento dei corpi S_1 ed S_2, che può venir costatato mediante l'osservazione.

La sola risposta soddisfacente alla domanda formulata sopra non può avere che la forma seguente: il sistema fisico costituito da S_1 ed S_2 non rivela in sé stesso alcuna causa alla quale possa farsi risalire il diverso comportamento di S_1 ed S_2. La causa deve quindi risiedere *al di fuori* di questo sistema. Si arriva a suppore che le leggi generali del moto, che in particolare determinano le forme di S_1 ed S_2, debbano esser tali che il comportamento meccanico di S_1 ed S_2 sia determinato, in modo del tutto essenziale, da masse distanti che noi non abbiamo incluso nel sistema considerato.

Queste masse distanti (e i loro movimenti relativamente ad S_1 ed S_2) debbono allora venir riguardate come la causa principale, osservabile, del diverso comportamento dei nostri due corpi S_1 ed S_2; esse assumono il ruolo della causa fittizia R_1. Di tutti gli spazi immaginabili R_1, R_2 ecc., comunque in moto relativo gli uni rispetto agli altri, non ve ne è alcuno che si possa considerare come privilegiato a priori senza far risorgere l'obiezione epistemologica sopra citata. *Le leggi della fisica debbono essere di natura tale che le si possa applicare a sistemi di riferimento comunque in moto*. Seguendo questa via giungiamo a una generalizzazione della teoria della relatività. *

In aggiunta a questo argomento, di notevole peso per la teoria della conoscenza, vi è un ben noto fatto fisico che favorisce la generalizzazione della teoria della relatività. Sia K un sistema di riferimento galileiano, vale a dire un sistema rispetto al quale (almeno nella regione quadridimensionale in esame) una massa, sufficientemente distante dalle altre masse, si muova di moto rettilineo uniforme. Sia K' un secondo sistema di riferimento che si muove, rispetto a K, di moto relativo traslatorio *uniformemente accelerato*. Allora, relativamente a K', una massa sufficien-

* Necessità dello studio della gravitazione; modificazione della costanza di c nel vuoto.

temente distante dalle altre avrà un moto accelerato tale che la sua accelerazione e la direzione di questa siano indipendenti dalla natura materiale e dallo stato fisico della massa. Un osservatore a riposo rispetto a K' può concludere che egli si trova su un sistema di riferimento «realmente» accelerato? La risposta è negativa; infatti la relazione sopracitata delle masse liberamente mobili rispetto a K' può essere interpretata ugualmente bene nel seguente modo. Il sistema di riferimento K' non è accelerato, ma la regione spazio-temporale in questione subisce l'influenza di un campo gravitazionale, il quale genera il moto accelerato dei corpi rispetto a K'.

Questo punto di vista ci è reso possibile in quanto l'esperienza ci insegna che esiste un campo di forza, il campo gravitazionale, che gode della notevole proprietà di imprimere la medesima accelerazione a tutti i corpi.[2] Il comportamento meccanico dei corpi rispetto a K' è lo stesso che si osserva in presenza di sistemi che siamo soliti considerare «a riposo» oppure «privilegiati». Quindi, dal punto di vista fisico, l'ipotesi suggerisce prontamente essa stessa che i sistemi K e K' possono entrambi, con ugual diritto, essere considerati «a riposo», vale a dire hanno ugual diritto di venir scelti quali sistemi di riferimento per la descrizione dei fenomeni fisici.

Si vede da queste considerazioni che nell'istituire la teoria della relatività generale saremo condotti a una teoria della gravitazione, in quanto siamo capaci di «produrre» un campo gravitazionale semplicemente cambiando il sistema delle coordinate. * Si vede altresì che il principio della costanza della velocità della luce nel vuoto deve venir modificato, in quanto si costata facilmente che la traiettoria di un raggio di luce rispetto a K' deve essere in generale curvilinea, se rispetto a K la luce si propaga lungo una linea retta con determinata velocità costante.

3. *Il continuo spazio-temporale. Esigenza della covarianza generale per le equazioni che esprimono le leggi generali della natura*

Nella meccanica classica, come nella teoria della relatività ristretta, le coordinate spaziali e temporali hanno un significato

[2] Eötvös ha mostrato sperimentalmente, con grande esattezza, che il campo gravitazionale gode di questa proprietà.

fisico immediato. Dicendo che un punto (rappresentante un evento) ha la coordinata x_1 sull'asse X_1, si intende dire che la proiezione del punto dello spazio-tempo sull'asse X_1, determinata da segmenti rigidi e in accordo con le regole della geometria euclidea, è ottenuta riportando un segmento assegnato (il campione di lunghezza unitario) x_1 volte a partire dall'origine delle coordinate nella direzione positiva dell'asse X_1. Dicendo che un punto dello spazio-tempo ha la coordinata $x_4 = t$ sull'asse X_4, si intende dire che un orologio campione, costruito per misurare il tempo con assegnato periodo unitario, che è in quiete rispetto al sistema di coordinate e coincide (praticamente) nello spazio col punto rappresentante l'evento, ha segnato $x_4 = t$ periodi all'istante in cui il punto-evento si è verificato.[3]

Questa concezione dello spazio e del tempo è sempre stata presente alla mente dei fisici, anche se per la maggior parte in maniera inconscia, come risulta chiaro dall'ufficio che questi concetti svolgono nelle misure fisiche. Il lettore ha certamente supposto che questa concezione si trovi alla base della seconda riflessione del precedente paragrafo, allo scopo di dare un significato ai nostri sviluppi. Sennonché ora mostreremo che è necessario abbandonarla, e sostituirla con una concezione più generale, onde enunciare chiaramente il postulato della relatività generale, supponendo che la teoria della relatività ristretta si applichi al caso limite in cui sia assente il campo gravitazionale.

In uno spazio privo di campi gravitazionali introduciamo un riferimento galileiano K (x, y, z, t), e un sistema di coordinate K' (x', y', z', t') in moto rotatorio uniforme rispetto a K. Supponiamo che siano coincidenti le origini di entrambi i sistemi, e che l'asse z coincida sempre con z'. Mostreremo che, per una misura dello spazio-tempo riferita al sistema K', la concezione, sopra richiamata, del significato fisico delle lunghezze e dei tempi non può venir mantenuta. Per ragioni di simmetria è chiaro che una circonferenza giacente sul piano XY di K e con il centro

[3] Supponiamo sia possibile verificare la «simultaneità» di eventi molto prossimi nello spazio, o, più precisamente, la immediata prossimità nello spazio-tempo (coincidenza), senza dover dare qui una definizione di questo concetto fondamentale.

nell'origine può contemporaneamente venir considerata come circonferenza sul piano $X'Y'$ di K'. Supponiamo che la circonferenza e il diametro della stessa siano stati misurati con un'unità di misura (infinitamente piccola rispetto al raggio), e calcoliamo il rapporto delle due misure. Qualora si assuma come unità di misura un campione di lunghezza a riposo rispetto al sistema galileiano K, il rapporto che ne risulta sarà π. Qualora si assuma invece come unità di misura un campione di lunghezza a riposo rispetto a K', il risultato sarà maggiore di π. Ciò si comprende immediatamente se si riflette sull'intero processo di misurazione del sistema stazionario K, e si considera che l'unità di misura riportata sulla periferia subisce una contrazione lorentziana, quella riportata lungo il raggio no. Di conseguenza la geometria euclidea non vale per K'; la nozione di coordinata sopra ricordata, che presuppone la validità della geometria euclidea, cade, in riferimento al sistema K'. In modo analogo, inoltre, siamo incapaci di introdurre in K' un tempo che obbedisca alle esigenze fisiche, il quale sia indicato da orologi normali in riposo relativamente a K'. Per convincerci di questa impossibilità, immaginiamo che due orologi di identica costruzione siano posti uno nell'origine delle coordinate, e l'altro sulla circonferenza, ed entrambi siano osservati dal sistema «stazionario» K. In conseguenza di un risultato ben noto nella teoria della relatività ristretta, l'orologio sulla circonferenza, osservato da K, va più adagio dell'altro, perché il primo è in moto e il secondo sta fermo. Un osservatore posto nell'origine delle coordinate, in grado di osservare l'orologio sulla circonferenza mediante la luce, costaterà quindi che questo è più lento dell'orologio che gli sta accanto. E poiché tale osservatore non può pensare che la velocità della luce lungo la traiettoria in questione dipenda esplicitamente dal tempo, egli interpreterà le proprie osservazioni concludendo che l'orologio sulla circonferenza «realmente» va più adagio dell'orologio nell'origine. Egli sarà dunque obbligato a definire il tempo in modo tale che la velocità angolare delle lancette di un orologio dipenda dal luogo in cui l'orologio stesso si trova.

* Principio di covarianza generale.

Cosicché perveniamo al seguente risultato: nella teoria della relatività generale, lo spazio e il tempo non possono venir definiti in modo tale che le differenze tra le coordinate spaziali possano venir direttamente misurate mediante il regolo campione scelto come unità di misura, e le differenze tra le coordinate temporali possano venir direttamente misurate da un orologio campione.

Il metodo fin qui usato per fissare, nel continuo spazio-temporale, delle coordinate prescelte, non regge nel caso presente, e sembra che non vi sia alcun altro modo che ci permetta di adattare sistemi di coordinate all'universo quadridimensionale così da poterci aspettare dalla loro applicazione una formulazione particolarmente semplice delle leggi della natura.[4] Cosicché non rimane altro da fare che riguardare tutti gli immaginabili sistemi di coordinate, per principio, come ugualmente idonei per la descrizione della natura. Ciò porta a esigere quanto segue:

Le leggi generali della natura debbono potersi esprimere mediante equazioni che valgano per tutti i sistemi di coordinate, siano cioè covarianti rispetto a qualunque sostituzione (covarianti in modo generale). *

È chiaro che una teoria fisica la quale soddisfi a questo postulato soddisfa anche al postulato della relatività generale. Infatti la somma di tutte le sostituzioni include in ogni caso quelle che corrispondono a tutti i movimenti relativi dei sistemi tridimensionali di coordinate. Che questo bisogno di covarianza generale, che porta via dallo spazio e dal tempo l'ultimo avanzo di obiettività fisica, sia una necessità naturale, si vedrà dalla seguente riflessione. Tutte le nostre verifiche spazio-temporali si riducono invariabilmente a una determinazione di coincidenze spazio-temporali. Se, ad esempio, i fenomeni naturali consistono esclusivamente nel moto di punti materiali, allora in definitiva nulla si potrà osservare tranne l'incontro di due o più di questi punti. Inoltre i risultati delle nostre misurazioni non sono nient'altro che verifiche di certi incontri di punti materiali di nostri

[4] Trascuriamo di parlare qui di certe restrizioni corrispondenti al postulato del coordinamento univoco e a quello della continuità.

strumenti di misura con altri punti materiali, o coincidenze tra le lancette di un orologio e punti sul quadrante dell'orologio, o punti-evento osservati che cadono nello stesso posto e nel medesimo istante.

L'introduzione di un sistema di riferimento non serve ad altro scopo che a facilitare la descrizione della totalità di tali coincidenze. Si distribuiscono ordinatamente sull'universo quattro variabili spazio-temporali x^1, x^2, x^3, x^4 in modo tale che per ogni punto rappresentante un evento vi sia un sistema corrispondente di valori delle variabili x^1, ..., x^4. Se due punti (rappresentanti due eventi) coincidono, ad essi corrisponde un unico sistema di valori delle coordinate x^1, ..., x^4, vale a dire la coincidenza è caratterizzata dall'identità delle coordinate. Se, al posto delle variabili x^1, ..., x^4, introduciamo quattro funzioni delle stesse, x'^1, x'^2, x'^3, x'^4, come nuovo sistema di coordinate, in modo che tra i due sistemi vi sia corrispondenza biunivoca senza ambiguità, l'uguaglianza di tutte le quattro coordinate servirà anch'essa come espressione della coincidenza di due punti-evento nello spazio-tempo. E poiché tutta la nostra esperienza fisica può in definitiva ridursi a tali coincidenze, non vi è alcuna ragione immediata per preferire certi sistemi di coordinate ad altri, vale a dire giungiamo al postulato della covarianza generale.

4. *Relazione delle quattro coordinate con le proprietà metriche dello spazio e del tempo. Espressione analitica per il campo gravitazionale*

In questa memoria non è mia intenzione presentare la teoria della relatività generale come un sistema logico assai semplice, basato sul minimo di assiomi. Il mio scopo principale è invece quello di sviluppare questa teoria in modo tale che il lettore si renda conto che la via su cui ci siam messi è psicologicamente l'unica naturale, e che le ipotesi fatte van d'accordo il più possibile con l'esperienza. In vista di tale scopo formuliamo l'ipotesi:

Per regioni quadridimensionali infinitamente piccole, se le coordinate sono scelte convenientemente, rimane valida la teoria della relatività ristretta.

* Intervallo.

A tal fine dobbiamo scegliere l'accelerazione del sistema di coordinate infinitamente piccolo («locale») in modo tale che non vi sia alcun campo gravitazionale: il che è possibile per una regione infinitamente piccola. Siano X^1, X^2, X^3 le coordinate spaziali, e X^4 la corrispondente coordinata temporale, misurata nell'unità appropriata.[5] Se si immagina che un campione rigido sia scelto come unità di misura delle lunghezze, e sia assegnata l'orientazione del sistema delle coordinate, le coordinate hanno un significato fisico immediato nel senso della teoria della relatività ristretta. L'espressione

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \qquad [1]$$

*

ha, per la teoria della relatività ristretta, un valore che non dipende dall'orientamento del particolare sistema di coordinate, e che può essere determinato misurando lo spazio e il tempo. Denominiamo ds la lunghezza dell'«elemento lineare» congiungente due punti del continuo quadridimensionale infinitamente vicini. Se il ds^2 corrispondente all'elemento (dX_1, ..., dX_4) è positivo, diremo (seguendo Minkowski) che ha la natura di un tempo; se il ds^2 è negativo, diremo invece che ha la natura di uno spazio.

All'elemento lineare di cui ci stiamo occupando, vale a dire ai due punti-evento infinitamente vicini, corrisponderanno anche certi differenziali dx^1, ..., dx^4 delle coordinate quadridimensionali del sistema di riferimento prescelto. Se tale sistema e il sistema locale del genere descritto sopra sono dati per la regione in esame, i differenziali dX potranno venir rappresentati mediante determinate espressioni lineari omogenee dei dx^σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx^\sigma. \qquad [2]$$

Sostituendo tali espressioni nella [1], si ottiene

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau \qquad [3]$$

ove le componenti $g_{\sigma\tau}$ saranno funzioni delle x^σ, le quali non pos-

[5] L'unità di tempo deve essere scelta in modo tale che la velocità della luce nel vuoto, misurata dal sistema locale, sia uguale a 1.

sono ulteriormente dipendere dall'orientamento del sistema locale di coordinate. Questo perché ds^2 è una grandezza determinabile mediante misure fatte con campioni di lunghezza ed orologi appartenenti a punti-evento infinitamente prossimi nello spazio-tempo, e definiti indipendentemente da ogni particolare scelta delle coordinate. Le $g_{\sigma\tau}$ debbono venir scelte in modo tale che $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; la sommatoria deve esser estesa a tutti i valori di σ e di τ, cosicché la somma consta di 4×4 addendi, 12 dei quali sono uguali due a due.

Il caso dell'ordinaria teoria della relatività si deduce da quello qui considerato, allorquando è possibile, a motivo delle particolari relazioni tra le $g_{\sigma\tau}$ in una regione finita, scegliere il sistema di riferimento in quella regione in modo tale che le $g_{\tau\sigma}$ assumano ovunque i valori (costanti)

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix} \qquad [4]$$

Vedremo in seguito che una scelta siffatta non è possibile, in generale, per regioni finite.

Dalle considerazioni dei paragrafi 2 e 3 segue che le componenti $g_{\mu\nu}$ debbono venir considerate, dal punto di vista fisico, come le grandezze che descrivono il campo gravitazionale in relazione al sistema di riferimento prescelto. Supponendo infatti che la teoria della relatività ristretta si possa applicare, mediante una opportuna scelta delle coordinate, a una certa regione quadridimensionale, ivi le $g_{\mu\nu}$ hanno i valori dati dalla [4]. Di conseguenza un punto materiale libero si muove, rispetto a questo sistema, di moto rettilineo uniforme. Allora se introduciamo nuove coordinate spazio-temporali x^1, ..., x^4 mediante una sostituzione comunque scelta, le $g_{\mu\nu}$ di tale nuovo sistema non saranno più costanti, bensì funzioni dello spazio e del tempo. Contemporaneamente il movimento del punto materiale libero assumerà l'aspetto, nelle nuove coordinate, di un moto curvilineo non uniforme, e la legge di questo movimento non dipenderà dalla

* Rilevanza della gravitazione nelle TRG e problema delle forze elettromagnetiche.

natura fisica del punto materiale che si muove. Quindi interpreteremo questo movimento come generato da un campo gravitazionale. In tal modo costatiamo l'apparizione di un campo gravitazionale, collegato col fatto che le $g_{\mu\nu}$ variano in funzione dello spazio e del tempo. Nello stesso modo, nel caso generale, quando non è più possibile effettuare una scelta delle coordinate tale da poter mettere in evidenza la validità della teoria della relatività ristretta in una regione finita, continueremo a supporre che le $g_{\mu\nu}$ descrivano il campo gravitazionale.

In base alla teoria della relatività generale, la gravitazione occupa così una posizione eccezionale nei confronti delle rimanenti forze, e soprattutto delle forze elettromagnetiche, in quanto le 10 funzioni $g_{\mu\nu}$ che rappresentano il campo gravitazionale determinano contemporaneamente le proprietà metriche dello spazio quadridimensionale. *

B. MEZZI MATEMATICI PER LA FORMULAZIONE DI EQUAZIONI COVARIANTI IN MODO GENERALE

Dopo aver mostrato, nelle pagine precedenti, che il postulato della relatività generale esige che le equazioni della fisica siano covarianti nei riguardi di qualsiasi sostituzione delle coordinate $x^1, \dots, x^4$, dobbiamo mostrare come sia possibile trovare tali equazioni covarianti in modo generale. Ora volgiamo la nostra attenzione a questo problema, tipicamente matematico, e troveremo che l'invariante ds dato dalla [3], invariante che (seguendo la teoria gaussiana delle superfici) abbiamo denominato «elemento lineare», svolge un ruolo fondamentale nella soluzione del problema.

L'idea fondamentale della teoria generale degli enti covarianti è la seguente. Siano definiti certi enti («tensori») mediante un gruppo di funzioni posizionali, denominate «componenti» del tensore rispetto a un prefissato sistema di coordinate. Esistono poi determinate regole le quali permettono di calcolare tali componenti, rispetto a un qualsivoglia sistema, una volta che esse siano note rispetto al sistema originario di coordinate, e che sia conosciuto il legame tra le vecchie e le nuove coordinate. Gli enti qui sopra denominati «tensori» sono inoltre caratterizzati dal fatto che le equazioni di trasformazione delle loro componenti sono lineari ed omogenee. Di conseguenza, quando le componenti sono nulle rispetto al sistema primitivo, si annullano anche tutte le componenti rispetto al nuovo sistema. Cosicché, se una legge naturale si esprime eguagliando a zero tutte le componenti di un tensore, essa è covariante in modo generale; in tal modo, nel cercare le leggi della formazione dei tensori, otteniamo i mezzi per formulare leggi covarianti in modo generale.

5. *Quadrivettori controvarianti e covarianti*

Quadrivettori controvarianti. L'elemento lineare è definito mediante le quattro componenti dx^ν, la cui legge di trasformazione è espressa dall'equazione

$$dx'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} dx^\nu. \qquad [5]$$

Ognuna delle dx'^σ è una forma lineare omogenea delle dx^ν; possiamo, di conseguenza, considerare questi differenziali dx^ν delle coordinate x^ν come le componenti di un tensore, che distinguiamo col nome di «quadrivettore controvariante». Analogamente chiameremo quadrivettore controvariante ogni ente definito, relativamente al sistema di coordinate, da quattro grandezze le quali si trasformino rispettando la medesima legge

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} A^\nu. \qquad [5a]$$

Segue ovviamente dalla [5a] che, se A^σ e B^σ sono le componenti di due vettori controvarianti, le somme $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ sono componenti di un quadrivettore controvariante. La stessa cosa vale per tutti i sistemi che saranno in seguito introdotti come «tensori» (regola di addizione e di sottrazione dei tensori).

Quadrivettori covarianti. Diremo che quattro grandezze A_ν sono le componenti di un «quadrivettore covariante» se, qualunque sia il quadrivettore controvariante B^ν, risulta

$$A_\nu B^\nu = \text{invariante}. \qquad [6]$$

Da questa definizione segue la legge di trasformazione del vettore covariante. Se, infatti, nell'equazione

$$\sum_\sigma A'_\sigma B'^\sigma = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

sostituiamo al posto delle componenti B^ν le loro espressioni

$$B^\nu = \sum \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} B'^\sigma,$$

quali seguono dall'inversione delle [5a], troviamo

$$\sum_\sigma B'^\sigma \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} A_\nu = \sum_\sigma A'_\sigma B'^\sigma.$$

Poiché in questa equazione le B'^σ possono essere scelte indipendentemente le une dalle altre, segue da qui la legge di trasformazione delle componenti covarianti:

$$A'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} A_\nu. \qquad [7]$$

Osservazione sulla scrittura semplificata delle espressioni. Un'occhiata alle equazioni del presente paragrafo mostra che le sommatorie si effettuano sempre rispetto agli indici che si presentano due volte sotto il segno di somma (l'indice ν, ad esempio, nella [5]) e unicamente rispetto a indici siffatti. Pertanto è possibile, senza ledere la chiarezza, sopprimere il segno $\sum$. A tale scopo diamo la seguente regola: quando un indice si presenta due volte in un termine d'una espressione, occorre sommare rispetto ad esso, salvo esplicita indicazione contraria.

La diversità tra il quadrivettore covariante e il quadrivettore controvariante sta nella legge di trasformazione (rispettivamente [7] e [5]). Entrambe le forme sono tensori, nel senso dell'osservazione generale fatta sopra; in ciò è la loro importanza. Seguendo l'uso introdotto da Ricci e Levi-Civita, indichiamo il carattere

Da W. Pauli, *Teoria della relatività* pp. 224-225

Il principio di equivalenza era stato in origine formulato solo per campi gravitazionali *uniformi*. Nel caso generale esso può venire così enunciato: *Per ogni regione spazio-temporale infinitamente piccola (così piccola, cioè, che in essa la variazione spaziale e temporale della gravità possa venire trascurata) esiste sempre un sistema di coordinate* K_0 *(*X_1*,* X_2*,* X_3*,* X_4*), nel quale è assente ogni effetto della gravità sia sul movimento dei punti materiali, che su qualunque altro fenomeno fisico*. In breve, è sempre possibile eliminare qualunque campo gravitazionale in regioni di universo infinitamente piccole.

teologica. Se i veri concetti di tempo e spazio sono quelli assoluti, significa che i processi fisici newtoniani avvengono in una sorta di enorme stanza le cui pareti sono identificate dai tre assi del sistema di riferimento assoluto e il cui evolversi è inesorabilmente segnato dal tempo di un orologio universale e assoluto.

Per dare anche significato empirico a questa sostanzializzazione di spazio e tempo, Newton, all'interno dei *Principi*, propone degli argomenti volti a evidenziare come sia possibile rivelare sperimentalmente l'effettiva esistenza dei due enti assoluti. Limitatamente allo spazio assoluto – che ha a che fare con l'argomento che stiamo trattando –, Newton sottolinea che potrebbe essere evidenziato empiricamente rivelando o le sue proprietà, o le sue cause, o i suoi effetti. In realtà, evidenziarne le proprietà è impresa impossibile in quanto bisognerebbe evidenziare l'assolutezza del moto, o della quiete, del corpo che si sta osservando. Ma per fare questo bisognerebbe sapere già qual è il sistema di riferimento assoluto. E qui il problema si riproporrebbe. D'altro canto non è nemmeno possibile rivelare le cause assolute di un moto assoluto. Per fare questo bisognerebbe capire quando una forza è effettivamente impressa a un corpo in moto assoluto o in quiete assoluta. Rimane la terza possibilità, ossia quella di rivelare effetti assoluti. Questi infatti permettono di evidenziare moti assoluti, quindi il sistema di riferimento assoluto e perciò lo spazio assoluto.

A tal fine, Newton propone due esperimenti mentali: quello del secchio rotante e quello delle due sfere rotanti. In entrambi i casi si tratta di esperimenti mentali atti a mettere in evidenza effetti centrifughi, che per Newton sono rivelatori di un asse assoluto e quindi di uno spazio assoluto.

Nel caso del primo esperimento mentale, vi è un secchio pieno d'acqua appeso a una corda. Si ruota il secchio fino a completa torsione della corda e poi lo si lascia. Il secchio ruoterà ora in senso opposto e a causa di questa rotazione l'acqua dentro di esso si abbasserà al centro e si innalzerà alle pareti. In tal modo si evidenzia un asse privilegiato che Newton identifica con l'asse assoluto. Analogamente, nel caso delle due sfere legate fra di loro da una corda e ruotanti attorno al centro di gravità comune, vi sarà un allontanamento centrifugo delle sfere che sarà evidenziato dall'aumento della tensione della corda che le tiene unite. Anche in questo caso vi è un asse privilegiato che Newton identifica con l'asse assoluto.

Mach, nel 1883, in *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, sottopone a dura critica gli esperimenti e le conclusioni di Newton. Secondo Mach, Newton avrebbe ragione se, ad esempio nel caso del secchio ruotante, si facesse ruotare la totalità delle masse dei corpi celesti, se si tenesse fermo il secchio e se in questo caso non vi fossero effetti centrifughi. Ma, continua Mach, questo è impossibile, come pure è impossibile che lo stesso universo si comporti in due modi diversi. Ovvero, è impossibile che

1. vi sia un universo in cui i corpi celesti ruotano, il secchio stia fermo e non siano presenti effetti centrifughi;
2. vi sia un universo in cui i corpi celesti non ruotano, il secchio ruoti e gli effetti centrifughi siano presenti.

D'altronde, sottolinea Mach, è impossibile dirimere empiricamente la questione, dal momento che è impossibile fare un esperimento in cui si fa ruotare la totalità dei corpi celesti. Però l'universo è unico, e considerato che nel secondo caso vi sono effetti centrifughi, questi vi devono essere anche nel primo caso. Ne segue che l'allontanamento dall'asse non è un effetto assoluto, ma un effetto relativo ai corpi celesti, o, più precisamente, alla distribuzione delle loro masse e delle loro accelerazioni. Dunque, non esiste alcuno spazio assoluto, né alcun effetto assoluto, ma *effetti inerziali che devono essere interpretati come dovuti alla gravitazione*, ossia alla presenza della totalità delle masse dei corpi celesti e ai loro stati di moto.

Vi è comunque da sottolineare che gli esperimenti mentali di Newton sono pensati in un mondo assolutamente vuoto a eccezione del secchio ruotante o delle due sfere ruotanti. Invece i contro-esperimenti mentali di Mach sono pensati in un universo pieno di materia. A dire il vero, Newton, almeno relativamente all'esperimento delle due sfere, si chiede se gli stessi effetti assoluti possano essere presenti anche in un universo pieno di materia. La sua conclusione è positiva. E si chiede addirittura che cosa accadrebbe se a ruotare fossero le stelle lontane e se le due sfere rimanessero ferme. E qui conclude che nulla avverrebbe. Quindi Newton considera anche il controcaso su cui due secoli più tardi ragionerà Mach, giungendo però a conclusioni opposte.

Differenza fra intervalli infinitesimi in un universo piatto (descritto dalla relatività ristretta) e in un universo curvo (descritto dalla relatività generale)

Come abbiamo visto, l'intervallo ds nella relatività ristretta è ottenuto dall'espressione

$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, che si può anche scrivere, utilizzando il tensore di Minkowski η_{ik}

$ds^2 = \eta_{ik}\ dx^i\ dx^k$ dove con il generico termine dx^μ si intende il differenziale della generica coordinata ($dx^0 = d\tau = cdt,$ differenziale della coordinata temporale) e occorre sommare per tutti i valori (da 0 a 3) degli indici i, k. Il tensore di Minkowski può essere rappresentato dall'insieme di 16 grandezze come nella matrice seguente:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Nel caso di spazi curvi il quadrato dell'intervallo sarà espresso in coordinate gaussiane per mezzo del tensore metrico g_{ik}

$ds^2 = g_{ik}\ dx^i\ dx^k$.

Anche il tensore metrico è un insieme di 16 grandezze, delle quali al massimo 10 differiscono tra loro, perché evidentemente $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

(Le lettere i, k poste in alto sui differenziali sono da intendersi come indici e non come esponenti). I vari elementi del tensore metrico definiscono la curvatura dello spazio-tempo nel punto evento considerato.

Da Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*

renziali, credette di aver potuto dimostrare che le equazioni che determinano le g_{ik} non possono essere covarianti nel senso generale. Nel 1915, però, egli stesso riconobbe che le condizioni di invarianza, da lui imposte alle equazioni del campo gravitazionale, non bastano a determinare queste in modo univoco. Per ridurre l'indeterminazione ritornò alla condizione della covarianza generale, che in precedenza «aveva abbandonato solo a malincuore». E questa volta, valendosi della teoria riemanniana della curvatura, riuscí a scrivere anche per le g_{ik} equazioni covarianti in generale e rispondenti a tutti i requisiti fisici [1] (cfr. § 56). In una successiva comunicazione [2] mostrava che la sua teoria spiega quantitativamente il moto del perielio di Mercurio e prevede una curvatura dei raggi luminosi nel campo di gravitazione del sole doppia di quella precedentemente calcolata, per campi *uniformi*, in base al principio di equivalenza. Poco dopo appariva il lavoro conclusivo di Einstein sui fondamenti della teoria della relatività generale [3]. Nel seguito esporremo i princípi e gli sviluppi ulteriori di questa teoria.

51. FORMULAZIONE GENERALE DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. RELAZIONI TRA METRICA E GRAVITAZIONE

Il principio di equivalenza era stato in origine formulato solo per campi gravitazionali *uniformi*. Nel caso generale esso può venire cosí enunciato: *Per ogni regione spazio-temporale infinitamente piccola* (*cosí piccola, cioè, che in essa la*

[1] A. EINSTEIN, Berl. Ber. (1915) 778, 799, 844. Contemporaneamente e indipendentemente da Einstein, anche Hilbert ha scritto le equazioni di campo covarianti in modo generale: D. HILBERT, *Grundlagen der Physik*, Gött. Nachr., math.-nat. Kl. (1915) 395. La sua formulazione però ha avuto minore risonanza tra i fisici per due ragioni: anzitutto viene introdotta assiomaticamente l'esistenza di un principio variazionale, e in secondo luogo le equazioni di campo non vengono dedotte per un sistema materiale qualunque, ma per il modello particolare offerto dalla teoria della materia di Mie (cfr. qui § 64). Sugli altri risultati del lavoro di Hilbert ritorneremo nel § 56 e nel § 57.

[2] A. EINSTEIN, Berl. Ber. (1915) 831.

[3] A. EINSTEIN, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. 49, 769 (1916). Apparso anche separatamente in opuscolo e nella raccolta *Das Relativitätsprinzip*.

variazione spaziale e temporale della gravità possa venire trascurata) *esiste sempre un sistema di coordinate* K_0 (X_1, X_2, X_3, X_4), *nel quale è assente ogni effetto della gravità sia sul movimento dei punti materiali, che su qualunque altro fenomeno fisico*. In breve, è sempre possibile eliminare qualunque campo gravitazionale in regioni di universo infinitamente piccole. Il sistema di coordinate locale può venire idealmente realizzato mediante una scatola sufficientemente piccola sospesa liberamente, che non sia soggetta ad altre forze esterne oltre alla gravità, e che, seguendo questa, cada liberamente.

È chiaro che questa eliminazione è possibile solo in quanto il campo gravitazionale ha la proprietà fondamentale di imprimere a tutti i corpi la stessa accelerazione; ovvero, detto con altre parole, in quanto la massa gravitazionale e la massa inerziale sono sempre uguali. Questa affermazione riposa ora su basi sperimentali molto sicure. Eötvös [1], con una esperienza intesa a stabilire se la direzione della risultante della forza di attrazione terrestre e della forza centrifuga dovuta alla rotazione della terra dipenda dalla natura della sostanza, ha dimostrato che massa inerziale e massa gravitazionale sono uguali con un grado di precisione di $1/10^8$. Nei confronti del teorema dell'inerzia dell'energia ha interesse una ricerca di Southerns [2], in cui si mostra che il rapporto tra massa e peso dell'ossido di uranio differisce da quello relativo all'ossido di piombo al massimo per $1/2 \cdot 10^{-5}$. Dal principio di equivalenza unito al teorema dell'inerzia dell'energia segue dunque che, *a ogni forma di energia*, va anche attribuito un *peso*. Se l'energia liberata nel decadimento radioattivo dell'uranio avesse un'inerzia, ma non avesse peso, il predetto rapporto avrebbe dovuto mostrare una variazione di 1/26 000. Eötvös riconfermò questo risultato spingendo la precisione a valori ancora piú elevati.

È naturale ammettere, ovviamente, che in K_0 valga la

[1] E. EÖTVÖS, Mat. Naturwiss. Ber. aus Ungarn 8, 65 (1890); R. EÖTVÖS, D. PEKÁR e E. FEKETE, Abh. XVI allgemeinen Konferenz int. Erdmessung, 1909; cfr. anche Gött. Nachr. (1909) 37, e D. PEKÁR, Naturwiss. 7, 327 (1919).

[2] L. SOUTHERNS, Proc. roy. Soc. A84, 325 (1910).

teoria della relatività ristretta. Tutti i teoremi di questa continueranno dunque a valere, solo che al posto del sistema di coordinate galileiane del § 2 interverrà il sistema K_0, definito per regioni infinitamente piccole. Tutti i sistemi K_0, deducibili l'uno dall'altro mediante una trasformazione di Lorentz, sono equivalenti. In questo senso si può dire che l'invarianza delle leggi fisiche rispetto alle trasformazioni di Lorentz continua a valere nell'infinitamente piccolo. Noi siamo ora in grado di associare a due eventi puntuali infinitamente prossimi un numero ricavabile mediante misurazioni, cioè la loro distanza ds. Per fare questo dobbiamo solo eliminare, mediante una trasformazione, il campo della gravità e poi costruire in K_0 la grandezza[1]:

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2 . \qquad [51.1]$$

I differenziali delle coordinate $dX_1, \ldots, dX_4$ *vanno determinati direttamente mediante i regoli e gli orologi che definiscono le unità di misura.* Consideriamo ora un sistema di coordinate K qualunque, nel quale l'associazione dei valori delle coordinate $x^1, \ldots, x^4$ ai punti di universo — a prescindere dalle condizioni di univocità e di continuità — sia del tutto arbitraria. In ogni punto i differenziali dX_i saranno allora espressioni lineari omogenee nei dx^k, e l'elemento di linea ds^2 assumerà la forma

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k , \qquad [51.2]$$

in cui i coefficienti g_{ik} sono funzioni delle coordinate. È inoltre chiaro che, nel passaggio a nuove coordinate, le g_{ik} si trasformano in modo che il ds^2 rimane invariante. L'analogia con quanto avviene nella geometria delle varietà non euclidee a piú dimensioni è dunque completa (§ 15). Il sistema K_0 nella scatola in caduta libera assume il ruolo del sistema geodetico di § 16; in esso le g_{ik} sono costanti, finché le loro derivate *seconde* possono venire trascurate e l'elemento di

[1] A differenza degli altri autori, anche nella teoria della relatività generale assegniamo all'elemento di linea tre dimensioni positive e *una* negativa, e non viceversa. Di ciò va tenuto conto nel confronto delle formule che scriveremo con quelle usuali.

linea ha la forma [51.1] a meno di termini del *secondo* ordine. La totalità dei valori delle g_{ik} in tutti i punti di universo verrà chiamata *campo G*.

La legge del moto di un punto materiale, soggetto alla sola forza della gravità, può ora venire formulata in modo semplice. *La linea di universo di un tale punto materiale è una linea geodetica* (§ 17), ed è, in base alle espressioni [15.6] e [15.5],

$$\delta \int ds = 0 , \qquad [51.3]$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = 0 , \qquad [51.4]$$

dove le Γ^i_{rs} sono definite dalle equazioni [14.3] e [14.6]. Nel sistema K_0 il punto materiale si muove dunque, istante per istante, di moto rettilineo uniforme, $d^2x^i/ds^2 = 0$, che è anche il sistema delle equazioni della geodetica in K_0. Ma l'affermazione, che la linea di universo del punto materiale è non solo una geodetica, ma anche invariante vale dunque in generale. (Qui si è senz'altro supposto che nella legge del moto non intervengano le derivate *seconde* delle g_{ik} rispetto alle coordinate.) La validità di questo semplice teorema non deve meravigliare. L'elemento di linea è stato appunto definito in modo che la linea di universo risultasse una geodetica. Vediamo dunque che *le dieci componenti del tensore* g_{ik} *assumono, nella teoria di Einstein, il ruolo del potenziale scalare newtoniano* Φ; *le componenti* Γ^i_{rs} *costruite mediante le loro derivate determinano l'intensità del campo gravitazionale.*

Analoghe considerazioni possono venire applicate ai raggi luminosi. Nel sistema K_0 questi raggi sono linee rette [1] e soddisfano alla relazione

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2 = 0 .$$

Le linee di universo dei raggi luminosi sono dunque in generale

[1] Naturalmente si ammette di essere nell'ambito di validità dell'ottica geometrica. Ciò non è piú corretto nel caso che vi sia diffrazione. Cfr. M. VON LAUE, Phys. Z. 21, 659 (1920).

[2] E. KRETSCHMANN, Ann. Phys. 53, 575 (1917).

linee geodetiche di lunghezza nulla (§ 22):

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k = 0 , \qquad [51.3a]$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx^r}{d\lambda} \frac{dx^s}{d\lambda} = 0 . \qquad [51.4a]$$

Kretschmann [2] e Weyl [1] hanno mostrato inoltre che già l'osservazione dell'arrivo di segnali luminosi basta per ricavare il campo G in un dato sistema di coordinate, anche senza fare intervenire il movimento di masse puntiformi.

Esiste tuttavia un terzo modo per misurare il campo G. Con l'aiuto di regoli (o meglio di fili) e di orologi è possibile determinare, in un dato sistema di coordinate, la dipendenza di ds dai differenziali dx^k su tutte le linee di universo uscenti da un punto arbitrariamente scelto; dopo di che, il campo G segue immediatamente. *Esso caratterizza dunque non solo il campo gravitazionale, ma anche il comportamento di regoli e orologi, cioè la metrica dello spazio tetradimensionale, che contiene la geometria dell'ordinario spazio tridimensionale come caso particolare.* Questa fusione di due campi finora completamente separati — metrica e gravitazione — deve essere considerata come il risultato piú interessante della teoria della relatività generale. Come abbiamo visto e come può venire anche illustrato con semplici esempi, esso è una conseguenza immediata del principio di equivalenza e della validità della teoria della relatività ristretta nell'infinitamente piccolo. Il movimento di un punto materiale sotto l'azione del solo campo gravitazionale può ora essere inteso anche come movimento *libero da forze*. Esso non è rettilineo uniforme, poiché il continuo spazio-temporale *non è euclideo* e quindi in esso il moto rettilineo uniforme non ha piú alcun senso e va sostituito con il moto lungo la linea geodetica. Corrispondentemente la legge di inerzia di Galileo va sostituita con la seguente:

$$\delta \int ds = 0 .$$

[1] H. WEYL, *Raum-Zeit-Materie*, 1ª ed., p. 182; 3ª ed., p. 194.

Questa ha, rispetto a quella, il grande vantaggio di essere covariante *in generale*. La gravitazione nella teoria di Einstein è una *forza apparente*, come lo sono la forza di Coriolis e la forza centrifuga nella teoria di Newton. (Ma si può con lo stesso diritto presentare la cosa dicendo che nella teoria di Einstein nessuna di queste forze va definita come apparente.) Che la prima, al contrario delle seconde, non possa venire eliminata mediante una trasformazione in tutta una regione finita, non conta. In regioni infinitamente piccole è sempre possibile eliminare la gravitazione, ed è questo che importa. Il fatto che il carattere pseudoeuclideo dello spazio-tempo influenzi in modo estremamente debole il comportamento degli orologi e dei regoli e si manifesti invece con forte evidenza nella deviazione del moto dei punti materiali dal moto rettilineo uniforme, cioè nella gravitazione, è, come vedremo nel § 53, una conseguenza della grandezza della velocità della luce.

Con la fusione di gravitazione e metrica trova una soluzione soddisfacente non solo il problema della gravitazione, ma anche quello della geometria. Le domande circa la verità dei teoremi geometrici e la geometria effettivamente valida nello spazio sono prive di significato, fino a che la geometria si occupa solo di oggetti ideali e non di quelli del mondo dell'esperienza. Se si aggiunge ai teoremi della geometria la definizione in base alla quale la lunghezza di un segmento (infinitamente piccolo) è il numero ottenuto mediante regoli rigidi o fili di misura secondo un ben definito metodo, allora la geometria diventa un ramo della fisica e i predetti interrogativi acquistano un ben preciso significato[1]. A questo punto la teoria della relatività generale permette di enunciare la seguente proposizione. Poiché la gravitazione è determinata dalla materia, dobbiamo postulare la stessa cosa anche per la geometria. *La geometria dello spazio non è data a priori, ma risulta determinata dalla materia.* (Come questo avviene sarà esposto nel § 56.) Una concezione analoga era già in

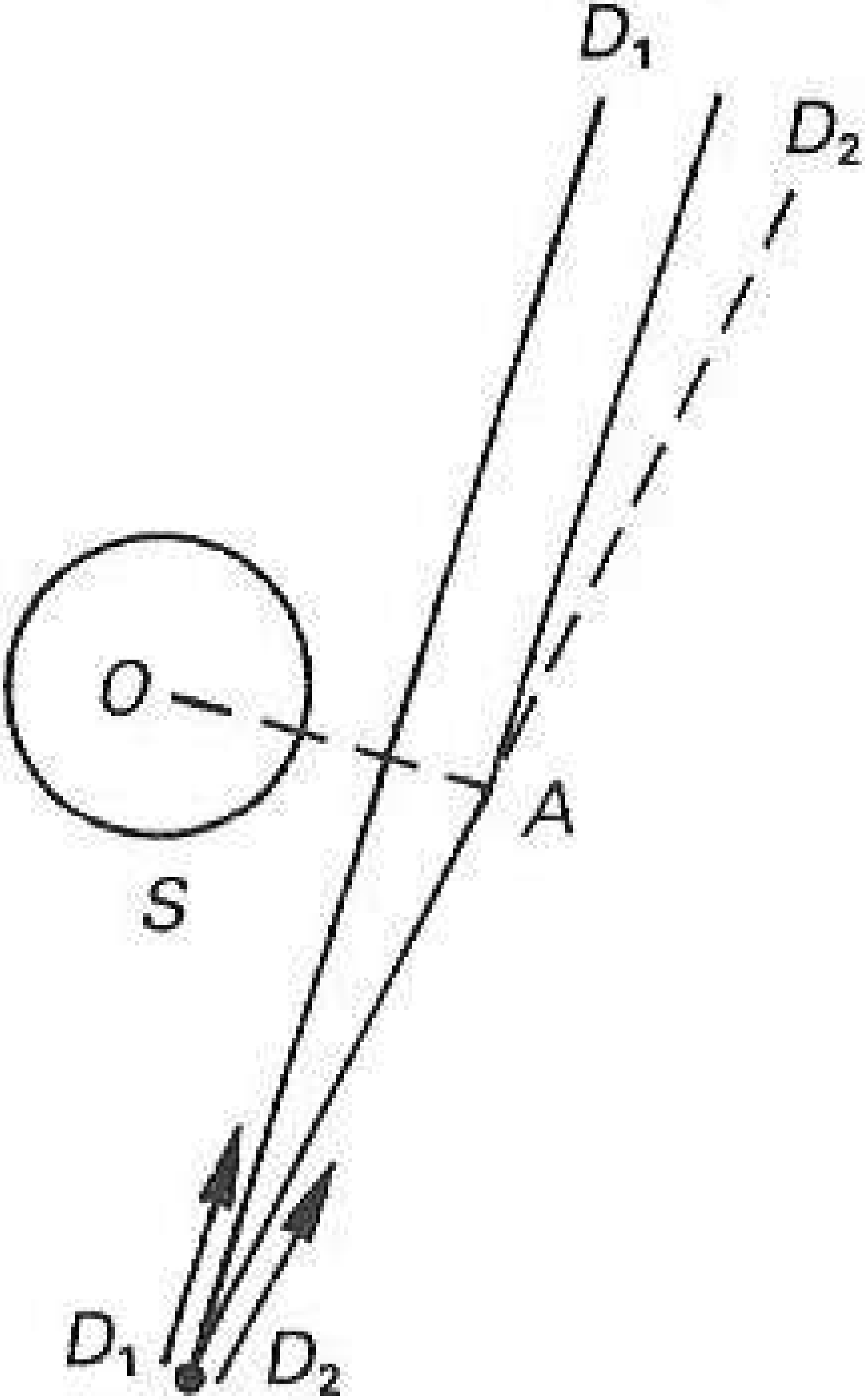
[1] A. EINSTEIN, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (1ª ed., Braunschweig 1917) p. 2.

Riemann[1]. Ma allora poteva soltanto rimanere un ardito progetto, poiché la deduzione del rapporto tra geometria e gravitazione è possibile solo quando sia già stata riconosciuta l'interconnessione metrica dello spazio e del tempo.

Formalizzazione del principio di equivalenza

Si può passare – solo localmente – dallo spazio curvo, in cui vi è un campo gravitazionale, ad uno piatto pseudoeuclideo descritto dalla relatività ristretta: in termini matematici ciò significa che è sempre possibile trovare una trasformazione che riduca il tensore metrico al tensore di Minkowski:

$$g_{ik} \rightarrow \eta_{ik}.$$



D_1
D_2
O
A
S
D_1
D_2

L'esperimento viene quindi trasferito nelle vicinanze del Sole. Qui abbiamo una forza di gravità 27 volte piú intensa che sulla Terra; e, ciò che è piú importante, le dimensioni molto piú grandi del Sole permettono una traiettoria molto piú lunga attraverso la regione in cui la gravità è abbastanza intensa. In questo caso la deviazione può anche essere dell'ordine di un secondo di arco, quantità che per gli astronomi è abbastanza grande.

In figura 16 la linea *TFQP* mostra la traiettoria di un raggio di luce

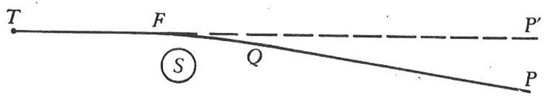


Figura 16

che, proveniente da una stella lontana *P*, raggiunge la Terra *T*. La parte principale della curvatura del raggio avviene quando esso passa vicino al Sole *S*; la direzione iniziale *PQ* e finale *FT* sono praticamente rettilinee. Dato che il raggio entra nell'occhio o nel telescopio dell'osservatore nella direzione *FT*, questa risulterà la direzione in cui appare la stella. Ma la vera direzione dalla Terra è *QP*, la traiettoria originale. Cosí la stella appare spostata dalla sua vera posizione di un angolo eguale alla deviazione totale della luce.

Si deve notare che questo è vero solo perché la stella è cosí lontana che la sua direzione vera rispetto alla Terra *T* è indistinguibile dalla sua direzione rispetto al punto *Q*. Nel caso di una sorgente di luce nell'interno del sistema solare, lo spostamento apparente della sorgente non è affatto eguale alla deviazione del raggio di luce. È forse curioso che l'attrazione della luce da parte del Sole debba produrre uno spostamento apparente della stella lontano dal Sole; ma è evidente che deve essere cosí.

La deviazione si ha nel caso di stelle viste in prossimità del Sole, e quindi l'unica possibilità di fare delle osservazioni è durante un'eclissi solare totale, quando la Luna copre la luce abbagliante del Sole. Anche

in tal caso vi è una grande quantità di luce che proviene dalla corona, che si allunga molto al di sopra del disco. È quindi necessario avere delle stelle abbastanza luminose vicino al Sole, che non vadano perdute nel bagliore della corona. Inoltre gli spostamenti di queste stelle possono venir misurati solo in rapporto ad altre stelle, preferibilmente piú distanti dal Sole e meno spostate; abbiamo perciò bisogno di un numero ragionevole di stelle brillanti lontane che servano da punti di riferimento.

In un'epoca superstiziosa un filosofo naturale che desiderasse fare un esperimento importante consulterebbe un astrologo per trovare il momento propizio per il tentativo. Con dei motivi piú validi, un astronomo che consultasse al giorno d'oggi le stelle annuncerebbe che il giorno piú favorevole per pesare la luce è il 29 maggio. La ragione è che il Sole nel suo viaggio annuale intorno all'eclittica attraversa campi di stelle di numerosità variabile, ma il 29 maggio si trova nel mezzo di un ammasso eccezionale di stelle luminose (parte delle Iadi), di gran lunga il migliore campo stellare che possa incontrare. Ora, se questo problema fosse stato sollevato in qualche altro periodo della storia, sarebbe stato necessario attendere qualche migliaio d'anni perché un'eclissi totale di Sole capitasse proprio in questo giorno fortunato. Ma per una strana coincidenza una tale eclissi accadde il 29 maggio del 1919. A causa della curiosa sequenza delle eclissi una simile opportunità si ripeterà nel 1938; siamo alla metà di questo ciclo estremamente favorevole. Non vogliamo dire che sia impossibile fare una verifica durante altre eclissi; ma il lavoro sarà certamente piú difficile.

L'attenzione su quest'opportunità notevolissima fu richiamata dal direttore dell'Osservatorio di Greenwich nel marzo del 1917; e si iniziarono i preparativi per le osservazioni. Furono inviate due spedizioni in due luoghi differenti della zona di totalità per ridurre al minimo il rischio di insuccesso in seguito a condizioni atmosferiche cattive. A. C. D. Crommelin e C. Davidson andarono a Sobral nel Brasile settentrionale; E. T. Cottingham e l'autore andarono nell'isola di Principe nel Golfo di Guinea, nell'Africa occidentale. L'equipaggiamento strumentale per entrambe le spedizioni fu preparato all'Osservatorio di Greenwich sotto la responsabilità del suo direttore, e là Davidson studiò gli accorgimenti a cui fu dovuto principalmente il buon esito di entrambe le spedizioni.

Le circostanze in cui si trovarono le due spedizioni furono in certo modo diverse e non è possibile trattarle insieme. Seguiremo prima le fortune degli osservatori di Principe. Essi possedevano un telescopio avente lunghezza focale di 11 piedi e 4 pollici (3,5 m). Sulle loro fotografie 1 secondo di arco (che era circa il massimo spostamento da misurare) corrispondeva a circa 1/600 di cm, valore facilmente apprezzabile. L'apertura dell'obiettivo era di 13 pollici (32 cm), ma quando veniva usato era ridotta a 8 pollici (20 cm), per ottenere immagini piú nitide. È necessario, anche durante un'esposizione di pochi secondi, tener conto del movimento diurno delle stelle attraverso il cielo, facendo in modo che il telescopio si muova per seguire il loro moto. Ma poiché è difficile montare un telescopio lungo e pesante nella maniera necessaria su un'installazione provvisoria in una regione remota del globo, il sistema usato nelle eclissi è quello di fissare il telescopio e di riflettere su di esso l'immagine delle stelle mediante un celostato, cioè uno specchio piano rotante nella giusta misura in base a un meccanismo di orologeria. Quest'accorgimento fu adottato da entrambe le spedizioni.

Gli osservatori ebbero piú di un mese di tempo per fare i loro preparativi sull'isola. Nel giorno dell'eclissi il tempo era sfavorevole. Quando incominciò la fase totale, il disco scuro della Luna circondato dalla corona risultò visibile attraverso le nuvole, proprio come spesso appare la Luna attraverso le nuvole in una notte in cui le stelle non sono visibili. Non vi era nulla da fare se non andare avanti nel programma stabilito e sperare nel meglio. Un osservatore si occupò di cambiare le lastre in rapida successione, mentre l'altro dava le esposizioni della durata richiesta con un diagramma posto di fronte all'obiettivo, per evitare di dare il minimo urto al telescopio.

D'altra parte a favore dell'ipotesi dell'etere gioca un argomento importante. Negare l'etere significa, in ultima istanza, supporre che lo spazio vuoto non possieda alcuna proprietà

fisica, il che è in disaccordo con le esperienze fondamentali della meccanica. Il comportamento meccanico di un sistema di corpi liberamente fluttuanti nello spazio vuoto dipende non soltanto dalle reciproche distanze di tali corpi e dalle velocità relative degli uni rispetto agli altri, ma anche dallo stato di rotazione. E questo, da un punto di vista fisico, non può essere considerato come una caratteristica assoluta del sistema. Per concepire la rotazione del sistema come qualcosa di reale, sia pure soltanto dal punto di vista formale, Newton obiettivò lo spazio. Avendo egli posto il suo spazio assoluto fra gli oggetti reali, la rotazione rispetto allo spazio assoluto diventa anch'essa una realtà. Newton avrebbe potuto benissimo chiamare etere lo spazio assoluto; ma l'essenziale sta in ciò: che si suppone come reale, accanto agli oggetti che ci si manifestano con l'osservazione, un oggetto che non lo è affatto, allo scopo di poter considerare l'accelerazione e la rotazione come qualcosa di reale.

È vero che Mach, per sfuggire alla necessità di supporre una realtà inaccessibile all'osservazione, si sforzò d'introdurre nella meccanica, in luogo dell'accelerazione relativa allo spazio assoluto, un'accelerazione media relativa alla totalità delle masse dell'universo. Ma la forza d'inerzia corrispondente all'accelerazione relativa di masse lontane presuppone un'azione a distanza senza un mezzo intermedio. E poiché il fisico moderno non si ritiene autorizzato ad accettare un'azione siffatta, così egli è condotto, anche attraverso questa concezione, all'ipotesi di un etere destinato a trasmettere gli effetti dell'inerzia. Tuttavia questa nozione di etere è sostanzialmente distinta da quella di Newton, Fresnel e Lorentz. L'etere di Mach non soltanto determina lo stato delle masse inerti, ma è a sua volta determinato da quelle.

Il pensiero di Mach trova il suo pieno dispiegamento nella concezione dell'etere della teoria della relatività generale. Secondo questa teoria, le proprietà metriche del continuo spaziotemporale sono diverse nell'intorno di ciascun punto dello spazio-tempo, e sono influenzate dalla materia che si trova all'esterno della regione considerata. Questi fatti, la modifica spazio-

17

temporale delle relazioni fra i regoli campione e gli orologi, o/e l'ammissione della non-omogeneità e della anisotropia dello *spazio vuoto* dal punto di vista fisico (il che ci obbliga a rappresentarne lo stato mediante dieci funzioni, i potenziali di gravitazione $g_{\mu\nu}$), questi fatti, dico, ci hanno obbligato ad accantonare definitivamente l'idea di uno spazio fisicamente vuoto. Così, però, la nozione di etere ha di nuovo ricevuto un contenuto preciso, sebbene molto differente da quello supposto dalla teoria ondulatoria meccanica della luce. L'etere della teoria della relatività generale è un mezzo che in sé non ha alcuna proprietà meccanica e cinematica, ma determina i fenomeni meccanici (ed elettromagnetici).

L'etere della teoria della relatività generale, quando lo si confronti con quello di Lorentz, ha questo di nuovo: in ciascun punto, il suo stato è legato a quello della materia e a quello dell'etere nei punti vicini secondo leggi esprimibili in forma di equazioni differenziali; viceversa, lo stato dell'etere di Lorentz, data l'assenza di campi elettromagnetici, non è determinato da alcunché di esterno ed è ovunque lo stesso. L'etere della teoria della relatività generale è idealmente riconducibile a quello di Lorentz, se si sostituiscono le funzioni spaziali che servono a descriverlo con altrettante costanti e se si prescinde dalle cause che ne determinano lo stato. Di conseguenza, si può anche dire che l'etere della relatività generale è stato dedotto da quello di Lorentz con un processo di relativizzazione.

Equazioni einsteiniane per il campo gravitazionale

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}R = kT_{ij}$$

R_{ij} è il tensore di Ricci, R la curvatura scalare, T_{ij} un tensore che tiene conto della distribuzione di materia, k una costante che, al limite, per campi deboli, deve ridurre la formula a quella classica di Newton; g_{ik} è il tensore metrico.

Einstein, ad un certo punto, per tener conto del dato sperimentale dell'allontanamento delle galassie con velocità proporzionale alla loro distanza, introdusse nella formula la cosiddetta costante cosmologica, che in seguito definì "l'errore più grande della mia vita".

"Si sospenda, per esempio, un secchio a un filo assai lungo, e gli si imprima un moto circolare continuo finché il filo divenga rigido a causa della torsione. Lo si riempia d'acqua e lo si lasci in quiete assieme all'acqua. Con una forza subitanea gli si imprima poi un moto circolare nel senso contrario. La corda disvolgendosi persevererà a lungo in questo moto; all'inizio la superficie dell'acqua sarà piana, com'era prima che il recipiente cominciasse a muoversi; ma in seguito questo, comunicando gradualmente la forza all'acqua, fa sì che essa a sua volta cominci sensibilmente a girare. L'acqua si allontana un po' per volta dal centro e sale lungo le pareti del recipiente, assumendo una forma concava. (Io stesso ho effettuato questo esperimento.)...

"In principio, quando il moto *relativo* dell'acqua nel secchio era massimo, quel moto non provocava alcuno sforzo di allontanamento dall'asse. L'acqua non tendeva alla periferia sollevandosi lungo le pareti, ma rimaneva piana, e perciò non aveva ancora cominciato il suo *vero* moto circolare. Poi, quando diminuì il moto relativo dell'acqua, la sua ascesa verso i bordi indicava lo sforzo di allontanamento dall'asse, e questo sforzo indicava che il suo *vero* moto circolare cresceva continuamente fino al punto massimo in cui l'acqua raggiungeva lo stato di quiete *relativa* nel secchio...

"È molto difficile conoscere i *veri* moti dei singoli corpi e distinguerli dai moti *apparenti*, poiché le parti dello spazio immobile, in cui i corpi si muovono di moto vero, non cadono sotto i sensi.

"La cosa non è però disperata. Suppliscono infatti opportuni aiuti, forniti in parte dai moti apparenti che sono le differenze dei moti veri, in parte dalle forze che sono cause ed effetti dei moti veri. Così per esempio se due globi, collegati fra loro per mezzo di un filo a una data distanza, vengono fatti ruotare intorno al comune centro di gravità, si conoscerà dalla tensione del filo lo sforzo di allontanamento dei globi dall'asse del moto, e con ciò si potrà calcolare la quantità del moto circolare. Se poi forze uguali qualsiasi fossero applicate simultaneamente su entrambe le facce dei globi in modo da aumentare o diminuire il moto circolare, dall'aumento o dalla diminuzione della tensione del filo si potrebbe conoscere l'aumento o il decremento del moto; e infine si potrebbe anche stabilire su quali facce dei globi debbano esser applicate le forze per aumentare al massimo il moto; e sono le facce posteriori, quelle cioè che seguono nel moto circolare. Una volta che siano conosciute le parti che seguono e quelle opposte che precedono, è conosciuta anche la direzione del moto. In questo modo si potrebbe trovare tanto la quantità quanto la direzione di questo moto circolare in uno spazio vuoto infinitamente grande, nel quale non vi fosse nulla di esterno né di sensibile, a cui i globi potessero essere riferiti."...